Click to verify

En el tema de Lmites y Continuidad de Funciones del rea de Clculo Diferencial, es importante tener en cuenta el uso correcto de lmites para ciertas funciones, en este artculo hablamos exclusivamente sobre los lmites trigonomtricos y sus posibles soluciones. Hacemos tambin uso de una tabla de ngulos notables que ayudar a resolver ejercicios sin dificultades. Lista de Contenido A continuacin podemos apreciar, la tabla de valores de las funciones trigonomtricas de ngulos notables. Recordar que los ngulos estn expresados en radianes, por ejemplo: Sen (/4) = sen (180/4) = sen (45) = 2/2 Resuelva los siguientes problemas de lmites trigonomtricos. Ejemplo 1.-Encuentre el lmite trigonomtrico, recuerde que se puede apoyar de la tabla de ngulos notables para su solucin. Solucin: Sustituimos el valor dew = 0en la funcin, y obtenemos: Nota: Si observamos la tabla, el cos 0 = 1 Respuesta: Ejemplo 2.-Encuentre el lmite trigonomtrico, recuerde que se puede apoyar de la tabla de ngulos notables para su solucin. Solucin: Al sustituir el valor dew =0en la funcin: Nota: Nos hemos guiado en la tabla de ngulos notables para poder darle solucin ms rpida: Respuesta: Ejemplo 3.-Encuentre el lmite trigonomtrico, recuerde que se puede apoyar de la tabla de ngulos notables para su solucin. Solucin: Sustituimos el valor dew =0, en la funcin: Respuesta: Ejemplo 4.-Encuentre el lmite trigonomtrico, recuerde que se puede apoyar de la tabla de ngulos notables para su solucin. Solucin: Sustituimos el valor dew =/2, en la funcin: Observe lo siguiente: Entonces, siguiendo el lmite Respuesta: Ejemplo 5.-Encuentre el lmite trigonomtrico, recuerde que se puede apoyar de la tabla de ngulos notables para su solucin. Solucin: Sustituyendo el valor deh = /3, en la funcin: Por lo que: Respuesta: Ejemplo 6.-Encuentre el lmite trigonomtrico, recuerde que se puede apoyar de la tabla de ngulos notables para su solucin. Solucin: Sustituyendo el valor deh = /3, en la funcin: Por lo que: Respuesta: Compartir con mis personas ! Lmites cuando tienden al infinito Lmites infinitos - Ejercicios Resueltos Lmites Indeterminados 0/0 - Racionalizacin Lmites Exponenciales Indeterminados 0/0 Lmites Algebraicos Indeterminados 0/0 Lmites Unilaterales Se presentan varios ejemplos relacionados con los lmites de funciones trigonomtricas, con soluciones detalladas y ejercicios con respuestas. Ejemplos y Soluciones Ejemplo 1 Encuentre el lmite Solucin del Ejemplo 1: Multiplicamos el numerador y el denominador por y escribimos El numerador se iguala a , por lo tanto el lmite se puede escribir como Hemos utilizado el teorema: . $\(\)\(\)\(\)\(\)$ Ejemplo 2 Encuentre el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac {\sin 4 x}{4 x} \)$ Solucin del Ejemplo 2: Sea $\(t = 4 x \)$. Cuando $\(x \)$ se acerca a 0, $\(t\)$ tambin se acerca a 0, de modo que $\(\lim_{x \to 0} \dfrac {\sin 4 x}{4 x} = \lim_{t \to 0} \dfrac {\sin t}{t} \)$ Ahora usamos el teorema: $\(\lim_{t \to 0} \dfrac {\sin t}{t} = 1 \)$ para encontrar el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac {\sin 4 x}{4 x} = \lim_{t \to 0} \dfrac {\sin t}{t} = 1 \)$ Ejemplo 3 Encuentre el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac {\sin 6 x}{5 x} \)$ Solucin del Ejemplo 3: Sea $\(t = 6 x \)$ o $\(x = t / 6 \)$. Cuando $\(x \)$ se acerca a 0, $\(t \)$ tambin se acerca a 0, por lo que $\(\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin 6 x}{5 x} = \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{5 t/6} \)$ $\(= (6 / 5) \lim_{t \to 0} \dfrac {\sin t}{t} \)$ Ahora usamos el teorema $\(\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1 \)$ para encontrar el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 6 x}{5 x} = (6 / 5) \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} \)$ $\(= (6 / 5) \cdot 1 = 6 / 5 \)$ Ejemplo 4 Encuentre el lmite $\(\lim_{x \to -3} \dfrac{\sin (x + 3)}{x^2 +7x + 12} \) \(= \lim_{x \to -3} \dfrac{\sin (x + 3)}{(x + 3)(x + 4)} \)$ Sea $\(t = x + 3 \)$ o $\(x = t - 3 \)$. Cuando $\(x \)$ se acerca a $\(-3 \)$, $\(t \)$ se acerca a 0. $\(\lim_{x \to -3} \dfrac{\sin (x + 3)}{x^2+7x + 12} \) \(= \lim_{t \to 0} \dfrac {\sin t} { t (t + 1) }\)$ Ahora aplicamos el teorema del lmite del producto de dos funciones. $\(= \lim_{t \to 0} \dfrac \sin t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \dfrac{1}{t+1} \) \(= 1 \cdot 1 = 1 \)$ Ejemplo 5 Encuentre el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin|x|}{x} \)$ Solucin del Ejemplo 5: Encontraremos el lmite cuando $\(x\)$ se acerca a 0 por la izquierda y cuando $\(x\)$ se acerca a 0 por la derecha. Para $\(x \lt 0\)$, $\(|x| = -x \)$ $\(\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\sin|x|}{x} \) \(= \lim_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} \)$ $\(= -1 \)$ Para $\(x \gt 0 \)$, $\(|x| = x \)$ $\(\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x }{x} \) \(\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} \) \(= 1 \)$ Los lmites por la izquierda y por la derecha tienen valores diferentes, por lo tanto, el lmite anterior no existe. $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin|x|}{x} \)$ no existe Ejemplo 6 Encuentre el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} \)$ Solucin del Ejemplo 6: Primero usamos la identidad trigonomtrica $\(\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \)$ $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} \) \(= \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}} \) \(= \lim_{x \to 0} \dfrac{ x \cos x}{\sin x} \) \(= \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x / x} \)$ Ahora usamos el teorema del lmite del cociente. $\(= \dfrac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} (\sin x / x)} = 1 / 1 = 1 \)$ Ejemplo 7 Encuentre el lmite $\(\lim_{x \to 0} \dfrac { \arctan x}{x} \)$ Solucin del Ejemplo 7: Primero usamos la identidad trigonomtrica $\(\csc x = 1 / \sin x \) \(\lim_{x \to 0} x / \sin x \) \(= \lim_{x \to 0} x \csc x \) \(= \lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x} \) 3. \(\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin x / x} \)$ $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x} \)$ Se usa el lmite del cociente. $\(= 1 / 1 = 1 \)$ Ejercicios: Encuentre los lmites 1. $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3 x }{\sin 8 x} \)$ 2. $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3 x}{x} \)$ 3. $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt x \, \sin (4 \sqrt x)}{x} \)$ 4. $\(\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x} \)$ Solucin a los Ejercicios 1. 3/8 2. 3 3. 1/4 4. 27 Ms Referencias y enlaces Tutoriales y Problemas de Clculo En trminos generales los lmites trigonomtricos se pueden resolver aplicando un lmite notable o una identidad trigonomtrica y en algunos casos se debe aplicar ambas operaciones. Sin embargo a veces es necesario realizar algunas operaciones algebraicas como multiplicar y dividir por un numero, factorizar, multiplicar por la conjugada o aplicar las propiedades de los lmites. A continuacin ven algunos vdeos que explican la teora y varios ejercicios desarrollados paso a paso.Teora y algunos ejemplos de lmites trigonomtricos notables. Ms problemas resueltos de lmites trigonomtricos en video:Ejercicios Resueltos - Lmites Trigonomtricos especiales:Problemas Resueltos de Limites Trigonomtricos en PDF Limites trigonomtricos que se resuelven utilizando la regla de L'Hopital. Relacionado:Calculo de limites de una funcin usando definicin - Ejercicios Resueltos Funciones Continuidad Limites y Asintotas - 88 Ejercicios Resueltos Lmites Laterales de Funciones - Ejercicios Resueltos --Limites de funciones trigonometricas en PDF Limites trigonomtricos que se resuelven utilizando la regla de L'Hopital. Relacionado:Calculo de limites de una funcin usando definicin - Ejercicios ResueltosFunciones Continuidad Limites y Asintotas - 88 Ejercicios ResueltosLmites Laterales de Funciones - Ejercicios Resueltos --Limites de funciones trigonometricas en cículo y otras reas de las matemticas para investigar el comportamiento de las funciones trigonomtricas en puntos especficos o en el lmite de un intervalo dado. Dentro de los lmites de este tipo podemos observar la siguiente identidad que nos ayudar a resolver muchos ejemplos:Utilizando este lmite, se puede obtener la serie de otros lmites trigonomtricos:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\tan x}}{x}=1$$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\operatorname{arcs}enx}}{x}=1$$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\arctan x}}{x}=1$Adems, suponemos que los ngulos se miden en radianes.Para entender mucho mejor el tema, comencemos a resolver algunos ejercicios.Problema 1.Encuentra el siguiente lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{4x}}{{\sin 3x}}$Solucin:Se puede observar que no es un lmite complicado, sin embargo hay que aplicar las propiedades pertinentes y resolver.Vamos a multiplicar la funcin principal por 3 y dividirla por 3:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{4x}}{{\sin 3x}}$Posteriormente sacamos el factor 4/3 y el lmite nos quedar as:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{3\cdot 4x}}{{3\sin 3x}}$Reduciendo los trminos, obtenemos:$\displaystyle \frac{4}{3}\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{1}{{\frac{{\sin 3x}}{{3x}}}}$Dividiendo la funcin por 3x, obtenemos:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{4}{3}\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{1}{{\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin 3x}}{{3x}}}}=\frac{4}{3}\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{1}{{\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin 3x}}{{3x}}}}=\frac{4}{3}\cdot 1}}=\frac{4}{3}$Que sera el resultado de nuestro lmite trigonomtricoProblema 2. Encuentra el siguiente lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 3x-\cos x}}{{x}}$Solucin:Lo primero que haremos ser factorizar el numerador, pues se trata de una identidad trigonomtrica:$\displaystyle \cos 3x-\cos x=-2\sin \frac{{3x+x}}{2}\sen\frac{{\alpha +\beta }}{2}\sen\frac{{\alpha -\beta }}{2}$Esto va generar que nuestra funcin del numerador tome la siguiente forma:$\displaystyle \cos (x+\alpha)\cos (x-\alpha)=-2\sen\frac{{x+\alpha x-\alpha }}{2}\sen\frac{{x+\alpha -\left({x-\alpha } \right)}}{2}$Reduciendo los trminos, obtenemos:$\displaystyle \cos (x+\alpha)\cos (x-\alpha)=-2\sen\frac{{2x}}{2}\sen\frac{{2\alpha }}{2}$Simplificando en el numerador principal, quedando entonces:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos \left({x+a} \right)\cos \left({x-a} \right)}}{x}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{-2\senx\sen\alpha }}{x}$Ahora si, obtenemos el resultado de nuestro lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{-2\senx\sen\alpha }}{x}=-2\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sen x}}{x}\cdot \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sen\alpha }}{x}$Aplicando un poco de lgebra, y por propiedades de lmites, obtenemos:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 3x-\cos x}}{{{{x}^{2}}}}=-2\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\senx }}{x}\cdot \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sen2x}}{x}$Justo aqu encontramos el primer lmite notable $\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 3x-\cos x}}{{{{x}^{2}}}}=-2\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sen x }}{x}$$Y finalmente, esto nos dara:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 3x-\cos x}}{{{{x}^{2}}}}=-2\left(1 \right)\cdot 2\underset{{2x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sen2x}}{{2x}}$$Aplicando un poco de lgebra, y por propiedades de lmites, obtenemos:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 3x-\cos x}}{{{{x}^{2}}}}=-2\left(1 \right)\cdot 2(2)=-4$$Por lo tanto la respuesta es-4Problema 3. Encuentra el siguiente lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sen5x-sen3x}}{{\senx}}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{2\senfrac{{5x-3x}}{2}\cos \frac{{5x+3x}}{2}}}{{\senx}}$Solucin:Aplicando la siguiente identidad trigonomtrica:$\displaystyle sen-seny=2sen\frac{{x-y}}{2}\cos \frac{{x+y}}{2}$Entonces nuestro lmite se transforma de la siguiente manera:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{2\senx\cos 4x}}{{\senx}}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{2senfrac{{2x}}{2}\cos \frac{{8x}}{2}}}{{\senx}}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{2senx\cos 4x}}{{\senx}}$Simplificando senx/senx$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{2senx\cos 4x}}{{\senx}}$Y finalmente, esto nos dara:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{2senx\cos 4x}}{{\senx}}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\cos 4x=2\cdot \cos 4\left(4\cdot0 \right)=2\cdot 1=2$Tenemos como resultado2Problema 4. Encuentra el siguiente lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos \left({x+a} \right)-\cos \left({x-a} \right)}}{x}$Solucin:Para darle solucin a este lmite trigonomtrico, utilizamos la siguiente identidad trigonomtrica:$\displaystyle \cos \alpha-\cos \beta =-2sen\frac{{\alpha +\beta }}{2}sen\frac{{\alpha -\beta }}{2}$Reduciendo los trminos, obtenemos:$\displaystyle \cos (x+\alpha)\cos (x-\alpha)=-2sen\frac{{2x}}{2}sen\frac{{2a}}{2}$Simplificando en el numerador principal, quedando entonces:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos \left({x+a} \right)-\cos \left({x-a} \right)}}{x}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{-2senxsen\alpha }}{x}$Ahora si, obtenemos el resultado de nuestro lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{-2senxsen\alpha }}{x}=-2\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin x}}{x}\cdot \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin ax}}{{{\sin bx}}}$Solucin:Aplicaremos una movimiento algebraico para poder resolver este ejercicio:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin ax}}{{\sin bx}}=\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\frac{{\sin ax}}{x}}}{{\frac{{\sin bx}}{x}}}$Posteriormente a eso, aplicaremos lo siguiente:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin ax}}{{\sin bx}}=\frac{a}{b}\frac{{\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin ax}}{{ax}}}}{{\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin bx}}{{bx}}}}$Obviamente $\displaystyle axto 0$ y $\displaystyle bxto 0$ como $\displaystyle x\to 0$. Entonces:$\displaystyle L=\frac{a}{b}\frac{{\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin ax}}{{ax}}}}{{\underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin bx}}{{bx}}}}=\frac{a}{b}$Por lo tanto la respuesta es:a/b Problema 6. Encuentra el siguiente lmite:$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 4x - \cos 2x}}{{{{x}^{2}}}}$Solucin:Aplicamos la identidad trigonomtrica para factorizar el numerador:$\displaystyle \cos 4x - \cos 2x = -2 \sin \frac{{4x + 2x}}{2} \sin \frac{{4x - 2x}}{2}$Simplificando:$\displaystyle \cos 4x - \cos 2x = -2 \sin 3x \sin x$$\displaystyle \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\cos 4x - \cos 2x}}{{{{x}^{2}}}}$Separamos los lmites:$\displaystyle -2 \underset{{x\to 0}}{\mathop{{\lim }}}\frac{{\sin 3x \sin x}}{{{{x}^{2}}}}$$-2 (-2 \sin 3x \sin x)\left({-2 \sin 3x}\right)$Simplificando:$\displaystyle -2 \cdot 1 \cdot1 = -4$$Por lo tanto, la respuesta es $\boxed{-6}$. Comparte con tus amigos !Aqu encontrars cmo resolver los lmites trigonomtricos. Podrs ver varios ejemplos de lmites de funciones trigonomtricos, donde sea posible, los lmites de las funciones trigonomtricos se deben aplicar un procedimiento previo, ya que suelen dar indeterminaciones.Adems, los lmites al infinito de las funciones trigonomtricas no existen, porque son funciones peridicas. Es decir, sus grficas se van repitiendo continuamente de manera peridica sin tender a ningn valor concreto.Todos los lmites trigonomtricos se calculan a partir de las siguientes dos frmulas:Demostracin de la frmulaSi intentamos hacer el clculo del lmite por sustitucin, obtenemos la indeterminacin cero entre cero:Pero esta frmula trigonomtrica se puede demostrar calculando valores de la funcin cada vez ms prximos a x=0 (ngulos en radianes).Los dos lmites laterales de la funcin trigonomtrica dan 1, por lo tanto, el lmite en el punto x=0 es 1:As que el lmite trigonomtrico del seno de x partido por x cuando x tiende a 0 es igual a 1.Esta frmula tambin se puede aplicar para ngulos mltiplos:Demostracin de la frmulaSi tratamos de hallar el lmite por sustitucin directa, obtenemos la forma indeterminada cero entre cero:Pero podemos comprobar que la igualdad a partir de la frmula demostrada arriba. Para ello, primero tenemos que multiplicar el numerador y el denominador de la fraccin por 1 ms el coseno de x:Ahora tenemos una identidad notable en el numerador de la fraccin, as que la podemos simplificar:A partir de la identidad trigonomtrica fundamental, reescribimos el numerador:De modo que podemos transformar la fraccin en un producto de fracciones:Utilizando las propiedades de los lmites, podemos convertir la expresin anterior en un producto de lmites:Gracias a la frmula demostrada arriba, podemos simplificar fcilmente el lmite trigonomtrico:Y, finalmente, hacemos el clculo del lmite resultante:Por lo que queda verificada la frmula del lmite trigonomtrico:Al igual que con la otra frmula, tambin se puede utilizar para ngulos mltiplos:Por lo tanto, para resolver los lmites trigonomtricos debemos utilizar la aritmtica para transformar las funciones y conseguir expresiones similares a estas. De este modo, podremos emplear alguna de las dos frmulas y hallar el valor del lmite.Por otro lado, a veces podemos necesitar aplicar alguna de las identidades trigonomtricas, por lo que se dejamos todas las frmulas a continuacinIdentidades trigonomtricasFrmula que relaciona las tres razones trigonomtricas principales.Identidad trigonomtrica fundamental:Relaciones trigonomtricas derivadas de la fundamentalngulos opuestos:Suma de dos ngulos:Diferencia de dos ngulos:ngulo doble:ngulo mitad:Suma y resta de senos y cosenos:Producto de senos y cosenos:Para que puedas ver exactamente cmo se calculan los lmites trigonomtricos, a continuacin hemos resuelto un ejemplo paso a paso.Vamos a ver cmo se resuelve un lmite trigonomtrico haciendo el siguiente ejemplo:Al intentar hacer el clculo del lmite trigonomtrico, se obtiene la indeterminacin de cero entre cero: Ver: lmites cero entre ceroDe modo que debemos transformar la funcin trigonomtrica para resolver el lmite. La funcin tangente es igual al seno partido por el coseno, por tanto:Ahora podemos expresar la funcin en forma de producto aplicando las propiedades de las fracciones:Usando las propiedades de los lmites, podemos convertir el lmite de dos funciones multiplicadas en el producto de dos lmites:Tal y como hemos demostrado ms arriba, el primer lmite trigonomtrico da 1:Por lo que solamente debemos hacer el siguiente clculo:Resuelve el siguiente lmite trigonomtrico:Primero de todo, por lo tanto, el lmite en el punto x=0 es 1:As que el lmite trigonomtrico del seno de x partido por x cuando x tiende a 0 es igual a 1.BBEstas identidades nos permiten simplificar las expresiones trigonomtricas mediante la sustitucin de trminos equivalentes. Al reducir una expresin a una forma ms simple, podemos calcular el lmite de manera ms sencilla.2. Simplificacin algebraica: Algunas veces, podemos simplificar una expresin trigonomtrica utilizando tcnicas de lgebra. Esto implica factorizar o cancelar trminos comunes tanto en el numerador como en el denominador.Por ejemplo, si tenemos una expresin como $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, podemos simplificarla al cancelar el factor comn de x en el numerador y el denominador:$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$Esta simplificacin algebraica nos permite calcular el lmite de manera ms rpida y sencilla.3. Lmites especiales: Los lmites especiales son casos particulares en los que podemos aplicar identidades trigonomtricas y propiedades de las funciones trigonomtricas para calcular el lmite.Algunos de los lmites especiales ms comunes incluyen:- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$Estos lmites especiales nos permiten resolver rpidamente muchas expresiones trigonomtricas y evitar clculos ms complicados.Uso de identidades trigonomtricas en el clculo de lmitesLas identidades trigonomtricas son una herramienta clave para calcular lmites trigonomtricos. Utilizando estas identidades, podemos simplificar las expresiones trigonomtricas y llegar a una forma ms manejable para calcular el lmite.Vamos a ver algunos ejemplos de cmo utilizar las identidades trigonomtricas en el clculo de lmites.Ejemplo 1: Calcular el lmite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.Solucin: Podemos utilizar la identidad trigonomtrica $\sin A - \sin B = 2\cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$ para simplificar el numerador:$\sin 5x - \sin 3x = 2\cos \left(\frac{5x+3x}{2} \right) \sin \left(\frac{5x-3x}{2} \right)$$$Sustituimos esta simplificacin en la expresin original:$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos \left(\frac{8x}{2} \right) \sin \left(\frac{2x}{2} \right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos (4x) \sin x}{\sin x} = 2\cos (0) \cdot 1 = 2$$Por lo tanto, el lmite de la funcin es 2.En este ejemplo, utilizamos la identidad trigonomtrica para simplificar el numerador y llegamos a una expresin de lmite especial $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ que nos ayud a calcular el lmite.Estos ejemplos nos muestran cmo utilizar identidades trigonomtricas para simplificar las expresiones y calcular lmites trigonomtricos.Resolucin paso a paso de ejercicios de lmites trigonomtricosA continuacin, vamos a resolver paso a paso algunos ejercicios de lmites trigonomtricos utilizando las estrategias y tcnicas descritas anteriormente. Estos ejercicios nos ayudarn a entender cmo calcular lmites trigonomtricos y cmo aplicar las identidades trigonomtricas en el proceso.Ejercicio 1: Calcular el lmite $\lim_{x\to 0} \frac{\cos (x+a) - \cos (x-a)}{x}$.Solucin: Utilizamos la identidad trigonomtrica $\cos A - \cos B = -2\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$ para simplificar el numerador:$\cos (x+a) - \cos (x-a) = -2\sin \left(\frac{(x+a)+(x-a)}{2} \right) \sin \left(\frac{(x+a)-(x-a)}{2} \right)$$$Sustituimos esta simplificacin en la expresin original:$\lim_{x\to 0} \frac{\cos (x+a) - \cos (x-a)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin \left(\frac{2x}{2} \right) \sin \left(\frac{2a}{2} \right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x \sin a}{x} = -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \sin a$$Simplificamos an ms utilizando la identidad especial $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$$Por tanto, el lmite de la funcin es-2\sin a.En este ejemplo, aplicamos la identidad trigonomtrica para simplificar el numerador y luego utilizamos el lmite especial $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ para calcular el lmite final.Ejercicio 2: Calcular el lmite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.Solucin: No podemos utilizar directamente ninguna identidad trigonomtrica para simplificar la expresin. Sin embargo, podemos utilizar una propiedad de las funciones trigonomtricas para llegar al resultado.Podemos utilizar la propiedad $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ para simplificar el lmite:$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{\sin bx}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a}{b}$$Por lo tanto, el lmite de la funcin es $\frac{a}{b}$.En este ejemplo, utilizamos una propiedad de las funciones trigonomtricas y aplicamos el lmite especial $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ para simplificar la expresin y calcular el lmite final.ConclusinEn el clculo diferencial, los lmites de las funciones trigonomtricas desempean un papel crucial para comprender el comportamiento de estas funciones en puntos especficos o en el lmite de un intervalo. Al calcular los lmites trigonomtricos, es importante utilizar diversas estrategias, como el uso de identidades trigonomtricas, simplificacin algebraica y la aplicacin de lmites especiales.En este artculo, hemos explorado diferentes estrategias y hemos resuelto ejercicios paso a paso. Hemos visto cmo aplicar las identidades trigonomtricas para simplificar las expresiones y cmo utilizar lmites especiales para llegar a los resultados finales.Calcular lmites de funciones trigonomtricas puede resultar desafiante al principio, pero con prctica y comprensin de las estrategias adecuadas, podemos desarrollar habilidades slidas en el clculo de lmites trigonomtricos. Estas habilidades son esenciales en el estudio del clculo diferencial y nos permiten analizar y comprender mejor las funciones trigonomtricas en diferentes situaciones y contextos.Temas que podran interesarte COMPARTE CON MIS ESTUDIANTES Resuelve los siguientes lmites directos: limx2(x+3) limx05x22 El lmite de la funcin fx=3xx2+x+2 en x=1 limx2x+1 limt3cost+2 limx10-3log10x Resuelve, cuando sea posible, los lmites de las funciones racionales siguientes, e interpreta el resultado graficamente: limx3x2+xx+3 limx3x3-27x+3 limx-15x+-xx3+1 limx1x2-1x-12 limx1x2-3x-12 limx22x2-10x+12x2+3x-10 El lmite de la funcin fx=x+2six2-3x+5six limx3x2+xx+3 en -2, 0 y 2 Calcula los lmites de las siguientes funciones a trozos y en valor absoluto fx=x+2six2-3x+5six